

ШИФР

056

(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

Письменная работа

Межрегиональная олимпиада школьников БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ-БУДУЩЕЕ НАУКИ

по математике в 11 классе
(наименование общеобразовательного предмета)

Фамилия И.О. участника Пронина Александра Евгеньевна

Дата рождения

Школа № 3 район _____ город Саров

Особые отметки (Заполняется представителем оргкомитета)
о добавлении листов, о смене цвета пасты, о нарушении правил поведения и т.д.

Дата проведения 19.01.2025

Правила поведения

Участник очного тура олимпиады **обязан**:

- занять место, которое ему указано представителями оргкомитета;
- соблюдать тишину;
- использовать для записей только листы установленного образца;
- работать самостоятельно и не оказывать помощь в выполнении задания другим участникам.

Внимание. Если во время проверки письменных работ, жюри обнаружит идентичный текст (или цитаты с одинаковыми грамматическими, речевыми или смысловыми (фактическими) ошибками) в двух, или более работах, то за эти работы баллы не начисляются.

Участнику олимпиады **запрещается**:

- разговаривать с другими участниками;
- использовать какие-либо справочные материалы (учебные пособия, справочники, словари, записные книжки, в том числе и электронные, и т.д., а также любого вида шпаргалки);
- пользоваться средствами мобильной связи;
- покидать пределы территории, которая установлена организаторами для проведения очного тура олимпиады.

Внимание. За нарушение правил поведения участник удаляется с очного тура олимпиады с выставлением нуля баллов за выполняющуюся работу независимо от числа правильно выполненных заданий. Все виды шпаргалок изымаются и выдаются по письменному

заявлению после истечения времени, предусмотренного на подачу и рассмотрение апелляций по данному предмету.

Оформление работы

Участник аккуратно заполняет титульный лист папки «Письменная работа», ставит дату и подпись.

На вложенных листах, как для чистовых, так и для черновых записей, можно писать или синей, или фиолетовой, или черной пастой (чернилами), одинаковой во всей работе (при необходимости смены цвета пасты (чернил), следует обратиться за разрешением к представителю оргкомитета олимпиады).

Задания (или часть задания), выполненные на листах, на которых имеются рисунки или записи, не относящиеся к выполняемому заданию, а также записи не на русском языке, и любые другие пометки, которые могут идентифицировать участника, на проверку не поступают и претензии по этим заданиям (задачам) не принимаются. На проверку не поступают также листы, подписанные участником, листы, на которых имеются записи карандашом (кроме рисунков, необходимых для пояснения сути ответа), и рваные (надорванные) листы. Нельзя делать исправления карандашом.

Внимание! Если в работе ошибки исправлены карандашом, то при шифровке работы карандашные исправления будут стерты и на проверку поступит работа без исправлений.

С правилами поведения на олимпиаде и правилами оформления работы ознакомлен

(подпись участника олимпиады)

ШИФР 056

(заполняется сотрудником секретариата)

Задание 1	Задание 2	Задание 3	Задание 4	Сумма баллов
+	+	+	-	-
20	20	20	3	0

Заполняется проверяющим!

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

Σ = 63

N 1

$$2 \cos^4 x - \sin^3 x = 1$$

$$2(1 - \sin^2 x)^2 - \sin^3 x = 1$$

$$2(1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x) - \sin^3 x = 1$$

$$2 - 4\sin^2 x + 2\sin^4 x - \sin^3 x - 1 = 0$$

$$2\sin^4 x - \sin^3 x - 4\sin^2 x + 1 = 0$$

$$t = \sin x$$

$$1) 2t^4 - t^3 - 4t^2 + 1 = 0$$

$$t = 1: 2 - 1 - 4 + 1 \neq 0$$

$$t = -1: 2 + 1 - 4 + 1 = 0$$

$t = -1$ — корень ур-ва

$$\begin{array}{r} 2t^4 - t^3 - 4t^2 + 1 \quad | \quad t+1 \\ \underline{-2t^4 + 2t^3} \\ -3t^3 - 4t^2 + 1 \end{array}$$

$$\underline{-3t^3 - 3t^2}$$

$$\underline{-3t^3 - 3t^2}$$

$$\underline{-t^2 + 0}$$

$$\underline{-t^2 - t}$$

$$\underline{t + 1}$$

$$\underline{-t + 1}$$

$$0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} t = -1 \\ t = \frac{1}{2} \\ t = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ t = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{array} \right.$$

$$t = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$t = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$t = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$t = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$(2) \frac{1-\sqrt{5}}{2} \vee -1$$

$$1-\sqrt{5} \vee -2$$

$$-\sqrt{5} \vee -3$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin x = -1 \\ \sin x = \frac{1}{2} \\ \sin x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \sin x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\sin x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad (1)$$

$$\sin x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad (2)$$

$$\sin x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{3\sqrt{5}}{2} \vee 5$$

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} > -1$$

подходит

$$2) 2t^3 - 3t^2 - t + 1 = 0$$

$$t = -1: -2 - 3 + 1 + 1 \neq 0$$

$$t = \frac{1}{2}: 2 \cdot \frac{1}{8} - \frac{3}{4} - \frac{1}{2} + 1 =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = 0$$

$t = \frac{1}{2}$ — корень ур-ва

$$\begin{array}{r} 2t^3 - 3t^2 - t + 1 \quad | \quad t - \frac{1}{2} \\ \underline{-2t^3 + t^2} \\ -2t^2 - t + 1 \end{array}$$

$$\underline{-2t^2 - t}$$

$$\underline{-2t^2 - t}$$

$$\underline{-2t + 1}$$

$$\underline{-2t + 1}$$

$$0$$

$$3) 2t^2 - 2t - 2 = 0$$

$$t^2 - t - 1 = 0$$

$$D = 1 + 4 = 5$$

$$t = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$(1) \text{ Сравним } \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ с } 1$$

т.к. $-1 \leq \sin x \leq 1$

$$1+\sqrt{5} \vee 2$$

$$\sqrt{5} \vee 1$$

$$5 > 1$$

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} > 1$$

значит ур-ве (1) не имеет корней

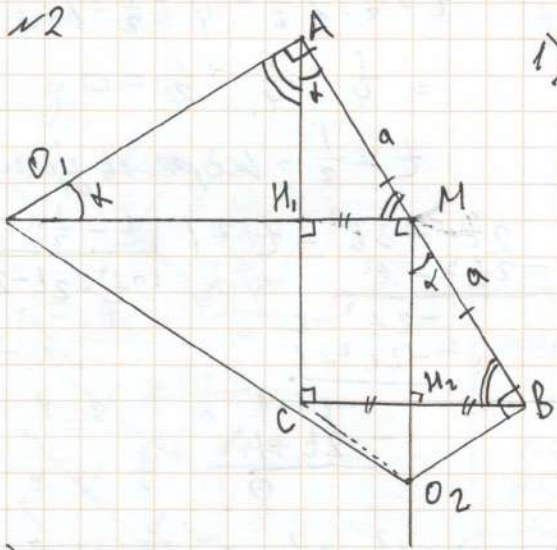
$$\begin{aligned} \sin x &= -1 \\ \sin x &= \frac{1}{2} \\ \sin x &= \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X &= -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \\ X &= \frac{\pi}{6} + 2\pi n \\ X &= \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \\ X &= \arcsin \frac{1-\sqrt{5}}{2} + 2\pi n \\ X &= \pi - \arcsin \frac{1-\sqrt{5}}{2} + 2\pi n \end{aligned}$$

$$n \in \mathbb{N}$$


Ober: $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$
 $x = \arcsin \frac{1-\sqrt{5}}{2} + 2\pi n$, $x = \pi - \arcsin \frac{1-\sqrt{5}}{2} + 2\pi n$

N2



1) Т.к. $\triangle ABC$ - п/у, M - середина гипотенузы, значит M - центр опис. окр. $\triangle ABC$.

М-т. пересечения серединных перп-меров.

2) т.к. В и С лежат на одной
окр, они равноудалены от
ее центра O_2 , значит

O_2 лежит на серединном перп-плоскости BC , т.е.

NO_2 - сред. перп.-мер.

2) для отрезка AC , OM - серед. перп-ль аналогично. MO_2 - серед. перп-ль

4) Т.к. $\text{Окр}(O_1; r_1)$ касается AB и $A \in \text{Окр}(O_1; r_1)$, значит $OA \perp AB$.

Для т. В соответственно $O_2 B \perp AB$.

5) Пусть $AM = MB = a$. В $\triangle ABC$ $\angle A = \alpha$, $\angle C = 90^\circ - \alpha$

Тогда для $\triangle O, AM$: $\angle A = 90^\circ$ $\angle AMO, = 90^\circ - \angle$ (из н/у
спр. $AMH,)$ значит $\angle AO, M = \alpha$

6) $\triangle MBK$: $\angle K = 90^\circ$ $\angle MBK = 90^\circ - \alpha$, значит $\angle KMB = \alpha$

$$6) AC = 2a \cdot \cos x \quad BC = 2a \cdot \sin x.$$

uz $\Delta O, AM$: $O, M = \frac{a}{\sin \alpha}$

$$u_3 \triangle O_2 MB: \quad O_2 M = \frac{a}{\cos \alpha}$$

7) $O_1M \perp AC$. $BC \perp AC$, значит $O_1M \parallel BC$.
 $O_2M \parallel AC$ аналогично. $\angle ACB = 90^\circ$, значит

$M H_1 C H_2$ - прямоугольник $\angle H_1 M H_2 = 90^\circ$

значит $O_1 M \perp O_2 M \Rightarrow O_1 M O_2$ - п/у

$$8) \frac{S_{ABC}}{S_{O_1 M O_2}} = \frac{AC \cdot BC}{O_1 M \cdot O_2 M} = \frac{2\alpha \cos \alpha \cdot 2\alpha \sin \alpha}{\alpha \cdot \alpha} \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha =$$

$$= 4 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha = (2 \sin \alpha \cos \alpha)^2 = \sin^2 2\alpha$$

№3

$a, b, c > 0$, т.к. это стороны $\triangle ABC$.

Такие выполняются:
$$\begin{cases} a < b+c \\ b < a+c \\ c < a+b \end{cases}$$

$$a x^4 + b x = c$$

$$a x^4 + b x < a + b$$

$$a(x^4 - 1) + b(x - 1) < 0$$

$$a(x^2+1)(x-1)(x+1) + b(x-1) < 0$$

$$(x-1)[a(x^2+1)(x+1) + b] < 0$$

$$(1) \quad x > 1$$

$$x^2+1 > 0 \text{ при } \forall x$$

$$x+1 > 0 \text{ при } x > 1$$

$$a(x^2+1)(x+1) < -b$$

$a > 0$, значит $a(x^2+1)(x+1) > 0$ при $x > 1$

$b > 0$, $-b < 0$ значит возникает противоречие и система (1) не имеет решений

$$(2) \quad \begin{cases} x < 1 \\ a(x^2+1)(x+1) > -b \end{cases}$$

$$a > 0, x^2+1 > 0 \text{ при } \forall x.$$

$$\text{при } -1 \leq x < 1 \quad x+1 \geq 0$$

$$\text{и } a(x^2+1)(x+1) > -b \text{ выполняется всегда, } x+1 > -\frac{b}{a(x^2+1)}$$

$$\text{при } x < -1$$

$$a(x^2+1)(x+1) < 0$$

$$a(x^2+1)(x+1) > -b \text{ выполняется если } -a(x^2+1)(x+1) < b$$

$$x+1 \geq -\frac{b}{a(x^2+1)}$$

$$\begin{cases} x^4 + \frac{b}{a}x - \frac{c}{a} = 0 \\ x > -\frac{b}{a(x^2+1)} - 1 \end{cases}$$

гдо $x=1$:

$$y = 1 + \frac{b}{a} - \frac{c}{a}$$

$$1 + \frac{b}{a} = \frac{a+b}{a} > \frac{c}{a}$$

значит $y > 0$

при $x=0$

$$y = -\frac{c}{a}$$

при $x=-2$

$$y = 4 - \frac{2b}{a} - \frac{c}{a}$$

$$y = 4 - \frac{2b+c}{a}$$

$$4 > \frac{2b+c}{a}$$

$$4 > \frac{b}{a} + \frac{b+c}{a}$$

$$4 > \frac{b}{a} + 1$$

$$\frac{b}{a} + 1 > \frac{c}{a}$$

$$\frac{2b+c}{a} > \frac{c}{a}$$

$$4 - \frac{2b+c}{a} < 4 - \frac{c}{a}$$

и

$$g \cdot x^{6x} = 1$$

$$x^{6x} = \frac{1}{g}$$

$$(x^x)^6 = \frac{1}{g}$$

$$\begin{cases} x^x = \sqrt[6]{\frac{1}{g}} \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^x = \sqrt[6]{\frac{1}{g}} \\ x > 0 \end{cases}$$

есть еще корни

$$\begin{cases} x^x = \sqrt[3]{\frac{1}{3}} \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^x = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \\ x > 0 \end{cases}$$

$$x = \frac{1}{3}$$

1 положительный корень

$$(-x)^6 = \frac{1}{g}$$

$$\left(-\frac{1}{x}\right)^6 = \frac{1}{g}$$

$$\frac{1}{x^{6x}} = \frac{1}{g}$$

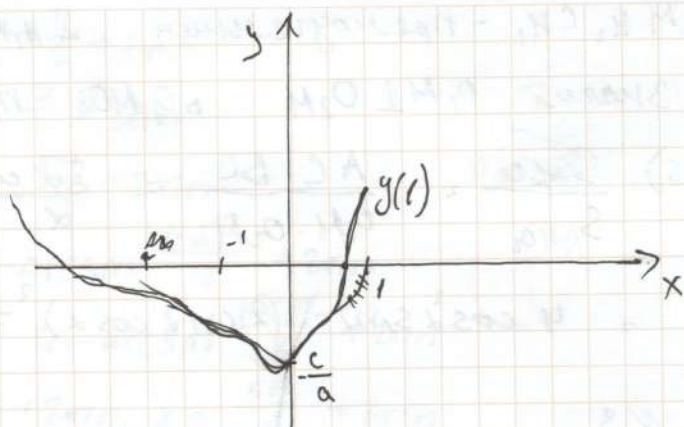
$$x^{6x} = g$$

$$x^x = \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$$

$$x^x = 3^{\frac{1}{3}}$$

отрицательных корней нет

нет обоснований



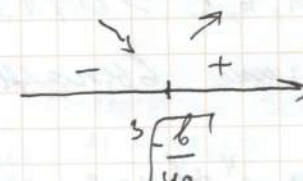
$$y = x^4 + \frac{b}{a}x - \frac{c}{a}$$

$$y' = 4ax^3 + b$$

$$4ax^3 + b = 0$$

$$x^3 = -\frac{b}{4a}$$

$$x = \sqrt[3]{-\frac{b}{4a}} \text{ - т. минимума}$$



значит существует отрицательный корень, единственный.

и единственный положительный корень $0 < x < 1$ отрицательный $x < -1$.

при $x=-1$: $y = 1 - (\frac{b}{a} + \frac{c}{a})$

$$\frac{b+c}{a} > 1 \quad y < 0$$

Значит отриц. корень по модулю больше положительного.